De Coster–getallen, de Pythagoras prijsvraag

Matthijs Coster

E. en Coster–getal heeft een bijzondere eigenschap: gebruikmakende van de cijfers van het getal, die allen precies tweemaal gebruikt moeten worden kan het getal zelf geconstrueerd worden, met behulp van de bewerkingen +, - × en ÷.

De speurtocht naar Coster–getallen heeft velen in de greep. Niet alleen scholieren zijn op zoek naar Coster–getallen onder de 200, maar er wordt ook naarstig gezocht naar grotere Coster–getallen. Op 16 januari, daags na de sluitingstermijn van de prijsvraag zal de redactie van het wiskundetijdschrift Pythagoras een lijst van Coster–getallen bekendstellen.

Tot op heden ontving de redactie al diverse inzendingen. De meest gangbare methode was het berekenen van $N = 2^a \times 3^b$, waarbij a, b forse getallen zijn. N is dan ook groot, (zeg N bevat n cijfers). Gemiddeld zullen $0, 1, \ldots, 9$ even vaak voorkomen. Nu heb je niets aan een 0, die moet je wegstrepen. De 5 kun je combineren met de 1 tot $6 = 5 + 1$ en de 7 met 2 tot $9 = 7 + 2$. Zo bevat N ongeveer $n/10$ maal 3,4 en 8 en $n/5$ maal 6 en 9. Splitsen we dit op naar de priemfactoren 2 en 3 dan vinden we $7n/10$ maal 2 ($n/5$ afkomstig van 4, $3n/10$ van 8 en $n/5$ van 6) en we vinden $7n/10$ maal 3. Bijvoorbeeld elke keer als de cijfers $0, 1, \ldots, 9$ voorkomen in N levert dat een factor $6^{14} = 78.364.164.096$ op, hetgeen groter is dan $10^{10} = 10.000.000.000$. Zodoende heb je enige speling, voor het geval dat de cijfers niet helemaal gelijk zijn verdeeld.

Zo laat Tim op http://www.wiskundemeisjes.nl/20060920/rekenprijsvraag/ zien dat $2^764 * 3^382$ een Coster–getal is.

Inmiddels is echter bekend dat het grootste Coster–getal nooit gevonden zal worden, want er zijn oneindig veel Coster–getallen. Neem de rij $45, 4545, 454545, 45454545, \ldots$.

$45 = (4 + 4) \times 5 + 5$

$4545 = (4 + 5) \times (5 \times 5 \times (4 \times 4 + 4) + 5)$

Op http://www.wiskundemeisjes.nl/20060920/rekenprijsvraag/ laten Albert Hendriks en Arjen Stolk zien dat vanaf lengte 32 al deze getallen Coster–getallen zijn. Eerder stuurde David Kloet de rij $55555555, 5555555555555555, \ldots$ in, die ook allen Coster–getallen zijn. Daarmee is een deel van de prijsvraag tot een goed einde gebracht. Maar desondanks kan iedereen nog inzenden, en meedingen naar de schoonheidsprijs. Na de sluitingstermijn gaat de jury bekeken wie de meest originele inzending had. Te denken valt aan Coster–getallen met veel nullen.

Probleem 1: Probeer het kleinste Coster-getal te vinden groter dan 10^n, voor $n = 5, 6, \ldots$. Je zult zien dat je vanzelf op getallen uitkomt met veel nullen.

Probleem 2: De bewijzen dat er oneindig veel Coster–getallen bestaan die tot nog toe bij de redactie, zijn gebaseerd op de constructie van een oneindige reeks van Coster–getallen, zoals $55555555, 5555555555555555, \ldots$ en $45, 4545, 454545, 45454545, \ldots$. Aan een dergelijke reeks gaan we een waarde toekennen, namelijk het aangepaste meetkundige gemiddelde. We nemen het product van de cijfers, als deze cijfers groter of gelijk aan 3 zijn. Elke combinatie van 1 en 2 laten we samen meetellen als een 3. De resterende tweeën tellen als 2. De resterende enen tellen mee als $\sqrt[3]{3}$. De motivatie is dat je probeert om zo groot mogelijke getallen te maken door toepassen van de gebruikelijke bewerkingen. Kleine getallen moet je zoveel mogelijk samenvoegen tot factoren 3. De vraag is nu om voor een reeks van Coster–getallen dit aangepaste meetkundig gemiddelde (zeg maar Coster–waarde) te minimaliseren. Voor de inzending van David Kloet is deze waarde 5, voor de inzending van Albert Hendriks en Arjen Stolk is deze Coster–waarde $2\sqrt{5}$. Op http://www.wiskundemeisjes.nl/20060920/rekenprijsvraag/ claimen ze dat ze nog een stuk lager (maar wel boven de 4) kunnen komen. Theoretisch kan de waarde niet onder $\sqrt{10}$ komen.

varianten

Hieronder wil ik ingaan op enkele varianten op de Coster–getallen. Op de eerdergenoemde pagina http://www.wiskundemeisjes.nl/20060920/rekenprijsvraag/ gaf ik al eerder aan een aantal open problemen. Ik ga hieronder dieper in op deze problemen:

Probleem 3: Onderzoek de binaire Coster-getallen. Tot nog toe vond ik 1,2,3,7,15 en 63. Zijn er meer? Ik zal ingaan op een stuk theorie dat nodig is om deze vraag te beantwoorden. Als je beschikt over m enen. Wat is het grootste getal dat je kunt maken met de bewerkingen $+, \times$? Het antwoord is als m een drievoud dan is het $n = 3^{m/3}$, als m een drievoud + 2 dan $n = 2 \times 3^{(m-2)/3}$ en als m een drievoud + 4 dan $n = 4 \times 3^{(m-4)/3}$. Dit resultaat is eenvoudig te bewijzen. Zie ook http://www.research.att.com/njas/sequences/A000792

Op de eerdergenoemde pagina http://www.wiskundemeisjes.nl/20060920/rekenprijsvraag/ schreven Albert Hendriks en Arjen Stolk dat zij een programma hadden geschreven waarmee zij alle getallen die te maken zijn met n enen opsomden. Ik denk dat ze vooral moeten kijken naar het samenvallen van machten van 2 en machten van 3. Als $|2^k - 3^m|$ heel klein is, dan is er een reële kans dat dit verschil te maken is met de enen die over zijn gebleven. Mijn vermoeden is echter dat $|2^k - 3^m|$ te groot zal zijn.

Probleem 4: Nu gaan we kijken naar Coster–getallen in het 3–tallig stelsel.

$1 = 1 \times 1$

$4 = 11_3 = 1 + 1 + 1 + 1$

$5 = 12_3 = 1 \times 1 + 2 + 2$

$7 = 21_3 = 2 \times (2 + 1) + 1$

$8 = 22_3 = 2 + 2 + 2 + 2$

$14 = 112_3 = 2 \times ((1+1) \times (1+2) + 1)$
$16 = 121_3 = (1+2+1) \times (1+2+1)$
$17 = 122_3 = 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$23 = 212_3 = (1+2) \times 2 \times 2 \times 2 - 1$
$25 = 221_3 = (1+2) \times 2 \times 2 \times 2 + 1$
$26 = 222_3 = (2+2+2) \times 2 \times 2 + 2$
$44 = 1122_3 = ((1+2) \times (1+2) + 1 + 1) \times 2 \times 2$
Zijn er oneindig veel Coster–3–getallen?
Wat is de kleinst mogelijke Coster–3–waarde?