Charles Mathy
Vincent van der Noort

De betatocht naar roem en rijkdom

Charles en Vincent zijn hun hele leven op zoek naar roem en rijkdom. Dit heeft ze beide geleid naar de studie wiskunde. Ze laten hier hun moed zien door een van de grootste onopgeloste problemen frontaal aan te vallen: de Riemann Hypothese. In dit artikel vertellen ze over de gevaren en mysteries die ze zijn tegengekomen, op hun zoektocht naar antwoorden.

Daar zit je dan, met je wilde plannen. Tot aan je nek in de numerieke benadering van oneigenlijke integralen, de orthogonale projectie van projectieve hypervlakken, en het lemma van Gauss, de stelling van Gauss, de Methode van Gauss, het vlak van Gauss, de formule van Gauss(-Bonnet), de constante van Gauss, de identiteit van Gauss, en uiteraard de middelwaardestelling. Niet bepaald een enkele reis naar roem en rijkdom.
Maar gelukkig gloort er nog hoop aan de horizon: het Clay Mathematics Institute [1] looft namelijk $1 miljoen uit aan degene(n) die de Riemann hypothese bewijzen.
De eerste stap is het afluisteren van gesprekken tussen hoogleraren. Soms gebeurt het volgende in deze gesprekken: een van de hoogleraren noemt iets, een stelling bijvoorbeeld, en de andere wordt helemaal bleek, of begint hardop cynisch te lachen. Dan weet je dat het onderwerp een goede kandidaat is.
We maakten zo'n gesprek met Dr. P. Moree mee, behalve dat hij vriendelijk met ons aan het praten was. Hij vertelde over de Riemann Hypothese.
En dit zei hij: In de beroemde toespraak van Hilbert in 1900 over “De problemen van de twintigste eeuw” heeft hij de Riemann Hypothese tot een van de grote onopgeloste problemen van de wiskunde benoemd. De Hypothese zegt: De nulpunten van de Riemann-Zeta functie hebben allemaal reële deel ½.
Gelukkig hadden we net onze tweedejaars project wiskunde afgerond over het bepalen van constantes in de getaltheorie (je kunt ons project vinden in de NSA inloopruimte). Daar hadden we onder andere opgepikt wat de Riemann-Zeta functie was. Hij is gedefinieerd als

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$$

met s een geheel getal. De eerste waarden hiervan zijn

$$\zeta(1) = \infty$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(3) = 1.202056903159594014596223$$

Na zorgvuldig analyse, kwamen we gelijk tot de conclusie dat deze functie helemaal geen nulpunten heeft! De Fields medaille begon langzaam voor onze ogen te verschijnen.

Helaas werd onze hoop hardhandig in de kiem gesmoord, toen we ontdekten dat het om de complexe Riemann-Zeta functie gaat. Maar hoe kan je nou een complex getal in de Riemann-Zeta functie invullen? Onze onmiddelijke reactie was "Hallo! Ga jij even een geheel getal i keer met zichzelf vermenigvuldigen! Zo lust ik ook peultjes!" Waren wij maar gerespecteerde hoogleraren: dan zouden we met een enkel handgebaar korten metten maken met dit verhaal. Maar als eenvoudige derdejaars student moet je nederig luisteren naar wat anderen hierover te zeggen hebben. Het blijkt dat professionele wiskundigen een trucje hebben om de bovenstaande formule zo te herschrijven, dat het op heel Â gedefinieerd is. En dit trucje houden ze krampachtig voor ons verborgen, bang als ze zijn dat wij er met hun miljoen vandoor gaan.

Toen deden we wat elke zichzelf respecterende wiskunde student zou doen: ask *Mathematica*. In de help functie stond allemaal interessante informatie over de complexe Riemann-Zeta functie. Antwoorden op onze vragen vonden we echter niet: *Mathematica* gaf weer blijk van haar beruchte gevoel voor humor, door onze vragen met een tegenvraag te beantwoorden, "Why the beep?".
Plotseling zag Vincent dat de deur van Jan Wiegerinck toevallig open stond. We keken elkaar aan, en we wisselden en blik van verstandhouding. Als we onze ware bedoelingen konden verbergen, zouden we toch van hem informatie los kunnen peuteren over het R-woord.
We gingen naar binnen en begonnen belangstellende vragen te stellen over zijn basketbalgeschiedenis. Toen hij rustig in zijn stoel zat, was de tijd rijp voor de volgende stap. "Zeg eens," zeiden we langs onze neus weg, "We vroegen ons af: Stel je hebt een functie, waar geen complexe getallen in passen, maar we willen toch weten wat die functie over i te zeggen heeft. Hoe zou je het aanpakken?" Hij vertelde over analytische voortzettingen. Sommige functies zijn alleen gedefinieerd op een klein gebiedje in het complexe vlak, bijvoorbeeld de reële lijn. Als je twee

functies hebt, f_1 op gedefinieerd op gebiedje G_1 en f_2 op G_2 , en de functies zijn gelijk aan elkaar op de doorsnede van G_1 en G_2, dan heet f_1 de analytische voortzetting f_2 op G_1. Het mooie is nu, (hier lichtten de ogen van de heer Wiegerinck op) dat deze voortzetting uniek is. Je kan niet twee verschillende voortzettingen van dezelfde functie hebben (als je functie voldoende net is, tenminste). Met een beetje geluk kun je zo een functie op de reële rechte voortzetten tot het gehele vlak. In wiskundetaal:

Definitie: zij G_1 en G_2 twee gebieden in Â, met f_1 een analytische functie op G_1 en f_2 een analytische functie op G_2. Als G_1 ' G_2 ∫ « en $f_1=f_2$ op G_1 ' G_2 , dan heet f_2 een analytische voortzetting van f_1 op G_2 .

Lemma: Als f_3 een analytische voortzetting van f_1 is tot G_3 dan geldt $f_2=f_3$ op G_2 ' G_3 .

Dit lemma zegt dus dat de uitbreiding uniek is. Onze volgende vraag was natuurlijk: “hoe vind je zo’n uitbreiding?” Zijn antwoord was dat dat van functie tot functie verschilt. Een bekend voorbeeld is de functie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

Deze functie is alleen gedefinieerd op een cirkelschijfje rond de oorsprong: alle punten met |z| < 1. Wij weten echter sinds Euler dat binnen dat schijfje f(z) gelijk is aan 1/(1 –z). En de functie g(z) = 1/(1-z) is wel gedefinieerd op heel Â buiten z =1. En omdat f en g gelijk zijn op de verzameling {z met |z| < 1}, is g dus een analytische voortzetting van f tot heel Â \ {1}.

Wij knikten belangstellend, maar we kregen ook steeds meer het gevoel dat er geen algemeen recept voor analytische uitbreidingen is. Zonder het R-woord te noemen zouden we niet verder komen. Maar duidelijk was, dat het noemen van het R-woord onze bron van informatie meteen zou doen opdrogen. Toen kreeg een van ons plotseling een geniale inval en zei: “hoe zou je nou een analytische uitbreiding maken van deze functie, die ik laatst bedacht heb:

$$\chi(z) = (\sum_{k=1}^{\infty} k^{-z}) - 2$$

Jan Wiegerinck knikte geïnteresseerd. “Ja, dat is een nog niet zo makkelijke. Laten we die 2 eerst maar even naar de andere kant brengen.“ Hij begon wat te mompelen, door zijn papieren te bladeren en op het bord te schrijven. “…het is duidelijk dat er een pool zit in 1… mompelmompel… als we nu eens de Euler-Gammafunctie gebruiken…Ja. Kijk, de kunst is eerst om de functie op de reële as handiger op te schrijven. We kunnen de som laten overgaan in een integraal. Voor z op de reële as met z > 1 geldt

$$\chi(z)+2=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u-1}du$$

met

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

de Gamma-functie. De gamma-functie kennen jullie wel: dat is de functie die op de natuurlijke getallen gelijk is aan de faculteit.”

Vervolgens verzonk hij weer in gepeins. “Dit moet wel uit te breiden zijn, eens zien. Hmmm, zo komen we tot het boven halfvlak….even kijken, hier nog een machtreeksje…Mooi. Zo heb je een uitbreiding tot het hele vlak behalve z = 1:

$$\chi(z)+2=\frac{1}{1-2^{1-z}}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}(k+1)^{-z}$$

Die pool in 1 krijg je niet weg.”

Hij keek nog eens tevreden naar de formule die hij zojuist op het bord had geschreven. Plotseling verscheen er een frons op het gezicht van de heer Wiegerinck die zich in hoog tempo uitbreidde tot een blik van totale ontsteltenis. Maar het was al te laat. We waren de deur al uit, met onze aantekeningen onder onze arm.

Dit is dus de **complexe Riemann-Zeta functie**:

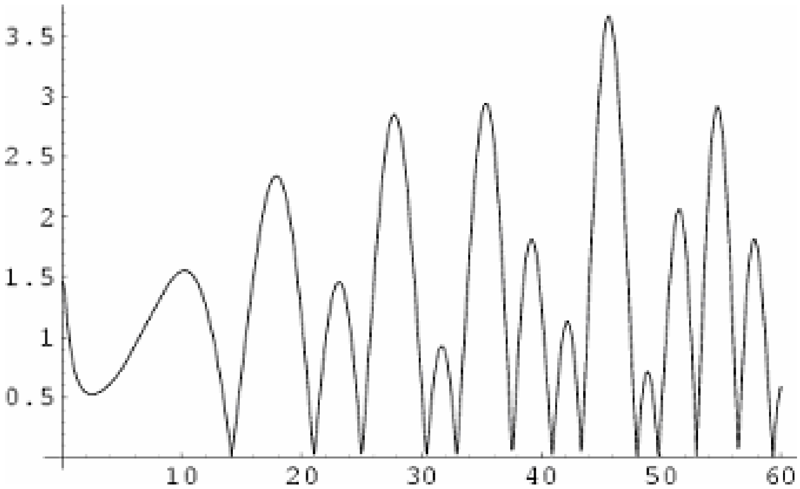
$$\zeta(z)=\frac{1}{1-2^{1-z}}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}(k+1)^{-z}$$

Onze toegangspoort tot roem en rijkdom. We konden nu eindelijk aan de slag gaan met de Hypothese.

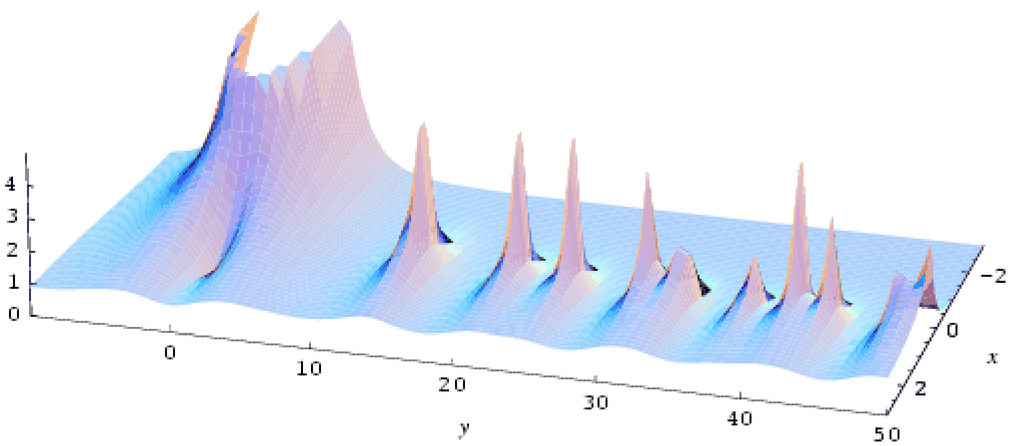
Hypothese: Alle niet-triviale nulpunten van de complexe Riemann-Zeta functie hebben reële deel ½.

De triviale nulpunten zijn trouwens z = -2, -4, -6, -8,… (Het is maar wat je triviaal noemt).

Riemann heeft ook bewezen dat reële deel van de nulpunten tussen 0 en 1 ligt. Je hoeft dus alleen op een stukje van Â te zoeken naar nulpunten.
Enthousiast begonnen we naar nulpunten te zoeken. Na een week hadden we er 1 (binnen de meetonnauwkeurigheid). Op internet lagen de nulpunten voor het opscheppen. Figuur 1 is een plaatje van z(z) voor z met Re(z) = ½.



Figuur 1: Z(z), met Re(z) = ½. De nulpunten vertonen niet echt een net patroon.



Figuur 2: 1/|Z(x + y i)| op een deel van het complexe vlak. De pieken corresponderen met de nulpunten.

De eerste 200.000.001 nulpunten zijn al gevonden, en hebben allemaal reële deel ½ . Helaas keert het Clay instituut niet $1 per nulpunt uit. De Hypothese blijft dus nog steeds onbewezen.

Wijzelf zijn tijdens onze zoektocht op een nieuw onderwerp gestuit… Het is veelbelovend, en we besteden al onze vrije tijd eraan. We houden het liever voor onszelf, misschien vertellen we er iets over in het volgende NSA blad.

Voor de mensen die zich afvragen waarom er een prijs op het hoofd van de Riemann Hypothese staat: Hij speelt een belangrijke rol in de getaltheorie.
Neem bijvoorbeeld de priemgetalstelling. Noem p(x) het aantal priemgetallen kleiner dan x, met x een reëel getal. Dan is de stelling:

Priemgetalstelling: Noem p(x) het aantal priemgetallen kleiner dan x, met x œ Ñ. Dan geldt

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} \equiv Li(x)$$

“Li” staat voor “Logaritmische integraal”. Met f(x) ~ g(x) wordt bedoeld dat

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Deze stelling kan gebruikt worden om talloze andere stellingen te bewijzen. Maar soms is die stelling niet genoeg, en moet je een idee hebben van hoe goed de benadering van p(x) met deze integraal is.
Noem r het supremum van de reële delen van alle nulpunten van de Riemann-Zeta functie. Dan geldt

$$\pi(x) - Li(x) = \mathrm{O}(x^{\rho} \log x)$$

met “O” het “grote O-symbool”. In andere woorden, de fout in de benadering uit de priemgetalstelling gaat als x^{r} log x.
We weten al dat r ¥ ½ . Bovendien heeft men bewezen dat als er een niet-triviaal nulpunt is met reële deel ½ - a, er ook een nulpunt is met reële deel ½ + a.
Als de Riemann Hypothese waar is, dan is de fout in de benadering van de orde $x^{1/2}$ log x. Is zij niet waar, dan kan de fout alleen groter worden.

Misschien zal dit artikel mensen inspireren om zelf een zoektocht te maken. Let wel, een Fields Medaille winnaar deelt altijd de eer met zijn eerste bron van inspiratie.

Referenties

[1] http://www.claymath.org/prizeproblems/rules.htm
[2] Syllabus Analyse 2B, J. Wiegerinck, UvA, 2000