Nulpunten op een lijn?

Jan van de Craats

leadtekst
Het belangrijkste open probleem in de wiskunde is het *vermoeden van Riemann*. Het is één van de *millennium problems* waarmee je een miljoen dollar kunt verdienen (zie nr. 1 van deze jaargang). De *Riemann-hypothese* zoals het vermoeden ook vaak genoemd wordt, luidt: 'alle niettriviale nulpunten van de zètafunctie liggen op de kritische lijn.' Over wat deze begrippen betekenen en over de verdere inhoud van de hypothese gaat het laatste artikel in onze serie over open problemen.

Eulers zètafunctie

Wat komt er uit de limietsom

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

als je op de plaats van de stippeltjes steeds meer omgekeerde kwadraten meeneemt? Met de computer kun je er proberen achter te komen. De eerste tien termen geven als uitkomst $1,54976$, de eerste honderd termen $1,63498$, de eerste duizend termen $1,64393$ en de eerste tienduizend termen $1,64483$. Het is niet moeilijk om te bewijzen dat er inderdaad een limietwaarde moet zijn en dat die kleiner is dan 2, maar toch schiet het met de convergentie (het naderen tot de limietwaarde) niet erg op. In feite zijn er bij tienduizend termen nog maar drie decimalen correct! We weten dit dankzij de beroemde wiskundige Leonhard Euler, die in in 1735 de *exacte* limietwaarde van deze som vond, namelijk

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

Op vijf decimalen afgerond is dit $1,64493$. Eulers ontdekking zorgde voor een sensatie in de wiskundewereld. Hoe is het mogelijk dat die som exact uitgerekend kan worden, en dat de uitkomst iets te maken heeft met het getal π? Maar Euler vond nog veel meer, zoals

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

en

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}$$

Hij definieerde in het algemeen de *zètafunctie* $\zeta(x)$ door

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots \tag{1}$$

en vond uitdrukkingen voor $\zeta(x)$ voor alle even waarden van x. Je zult het misschien vreemd vinden dat een functie gedefinieerd wordt door een *reeks*, een oneindige som van termen, maar zolang die reeks maar convergeert, dat wil zeggen een (eindige) limietsom heeft, is er niets mis mee. Met een stukje wiskundige techniek dat bekend staat als het *integraalkenmerk* (eerstejaarsstof voor wiskundestudenten) kun je bewijzen dat de reeks van de zètafunctie convergent is voor alle $x > 1$. Maar voor $x = 1$ gaat het mis want

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots = \infty$$

(zie het kaderstukje en figuur 6 op bladzijde 9).

Ook voor $x < 1$ convergeert de reeks (1) niet, want dan zijn de termen alleen nog maar groter. De functie $\zeta(x)$ is dus alleen nog maar gedefinieerd voor $x > 1$, maar later in dit artikel zullen we het domein van $\zeta(x)$ via andere formules stap voor stap verder uitbreiden.

Het Eulerproduct

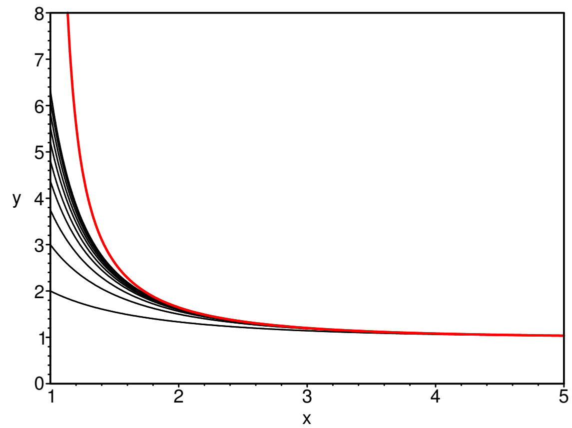
Waren Eulers vondsten voor $\zeta(x)$ voor even waarden van x al sensationeel, minstens zo indrukwekkend was de volgende formule die hij twee jaar later, in 1737, voor de zètafunctie vond. Hij liet daarin zien dat de zètafunctie alles te maken heeft met de *priemgetallenrij*. Euler bewees namelijk dat

$$\zeta(x) = \frac{2^x}{2^x - 1} \times \frac{3^x}{3^x - 1} \times \frac{5^x}{5^x - 1} \times \frac{7^x}{7^x - 1} \times \cdots \tag{2}$$

Hier staat een *oneindig product* van termen van de vorm $p^x/(p^x - 1)$, waarbij je voor p achtereenvolgens alle priemgetallen moet nemen. De volgende term is dus $11^x/(11^x - 1)$, dan een term met 13, enzovoort.

Formule (2) staat bekend als het *Eulerproduct*. Als je dit product na k termen afbreekt, krijg je de k-de *productbenadering*. Omdat elke term groter dan 1 is, vormen de productbenaderingen een stijgende rij functies met als limiet de zètafunctie. In figuur 1 zie je een grafiek van $\zeta(x)$ samen met de eerste tien productbenaderingen.

In een baanbrekend artikel uit 1859 nam Bernhard Riemann het Eulerproduct als uitgangspunt voor zijn onderzoek naar de priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ die aangeeft hoeveel priemgetallen er kleiner dan of gelijk aan x zijn. In nummer 2 van deze jaargang hebben we al iets over deze functie verteld. Riemann wist verrassende verbanden te leggen tussen $\pi(x)$ en de zètafunctie.



Figuur 1: *De grafiek van $\zeta(x)$ (rood) samen met de grafieken van de eerste tien productbenaderingen.*

Domein uitbreiden

Formule (1) definieert $\zeta(x)$ voor $x > 1$, want alleen op dat domein convergeert die reeks. Maar met een eenvoudige truc kun je het domein uitbreiden tot $x > 0$. In figuur 2 kun je al vast de grafiek van $\zeta(x)$ bewonderen op dat grotere domein.

Hier is die truc. Bekijk de zogenaamde *ètafunctie*

$$\eta(x) = 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{6^x} + \cdots \tag{3}$$

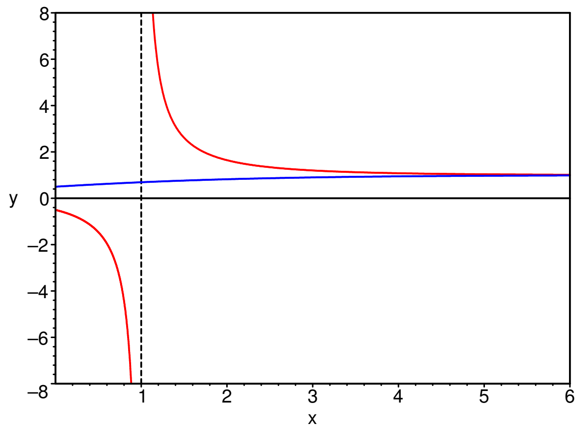
die alleen maar van $\zeta(x)$ verschilt in het teken van de even termen. Trek je de twee reeksen van elkaar af, dan houd je twee maal de even termen over, en dat kun je weer schrijven in termen van $\zeta(x)$ als volgt:

$$\begin{aligned} \zeta(x) - \eta(x) &= 2\left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{6^x} + \cdots\right) \\ &= 2^{1-x}\left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots\right) = 2^{1-x}\zeta(x) \end{aligned}$$

Hieruit kun je $\zeta(x)$ oplossen:

$$\zeta(x) = \frac{1}{1 - 2^{1-x}}\,\eta(x) \tag{4}$$

Nu komt de verrassing: de reeks van $\eta(x)$ convergeert niet alleen voor alle $x > 1$, maar zelfs voor alle $x > 0$ (ook dat is weer eerstejaarsstof). Met de computer



Figuur 2: *Een grafiek van $\zeta(x)$ voor $x > 0$ (rood). Let op de verticale asymptoot bij $x = 1$. Het punt $x = 1$ heet een* pool *van de functie. In dezelfde figuur in blauw de grafiek van $\eta(x)$.*

kun je goede benaderingen van de limietsom vinden. Zo geldt bijvoorbeeld dat $\eta(\frac{1}{2}) \approx 0,6048986$.

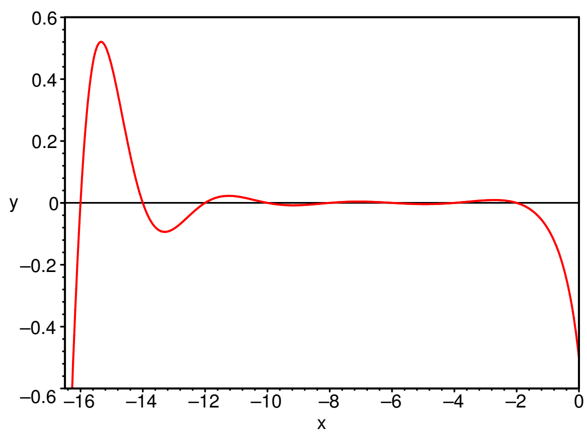
Formule (4) geldt in principe alleen voor $x > 1$, maar omdat $\eta(x)$ voor alle $x > 0$ berekend kan worden, kun je deze formule gebruiken om $\zeta(x)$ ook voor $0 < x < 1$ te *definiëren*. Daarmee is het domein van de zètafunctie uitgebreid tot $x > 0$. Zo volgt bijvoorbeeld uit $\eta(\frac{1}{2}) \approx 0,6048986$ dat $\zeta(\frac{1}{2}) \approx -1,4603545$. Alleen in $x = 1$ blijft het misgaan, want daar geldt formule (4) niet omdat de noemer dan nul wordt. Men noemt $x = 1$ een *pool* van de functie.

Riemanns formidabele formule

Figuur 2 suggereert duidelijk dat het domein van $\zeta(x)$ nog steeds niet af is. Bij $x = 0$ lijkt de grafiek gewoon af te breken (met $\zeta(0) \approx -0,5$). Zou het domein nog verder kunnen worden uitgebreid? Riemann vond het antwoord in de vorm van een werkelijk formidabele formule. Die formule was tegelijkertijd de gouden sleutel die hem toegang gaf tot de meest wonderbaarlijke verbanden tussen de zètafunctie en de priemgetallen. In een iets gewijzigde vorm luidt die formule als volgt:

$$\zeta(-x) = -2\,\frac{x!}{(2\pi)^{x+1}}\,\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,\zeta(x+1) \tag{5}$$

Met deze formule kun je het domein van de zètafunctie uitbreiden. In het rechterlid komt het bekende getal $\pi \approx 3.14159\ldots$ voor, maar ook $x!$, de *faculteitsfunctie* die je op school alleen maar leert voor gehele waarden van x, bijvoorbeeld $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ \times 5 = 120$, maar die via een integraal voor alle reële $x \geq 0$ kan worden gedefinieerd. Het rechterlid van (5) geeft op die manier voor alle $x > 0$ een uitkomst die gebruikt kan worden om $\zeta(-x)$ te berekenen.



Figuur 3: *Een grafiek van* $\zeta(x)$ *voor* $-16,5 \leq x \leq 0$*. Je ziet dat* $\zeta(x) = 0$ *als* $x = -2$*,* $x = -4$*, …,* $x = -16$*.*

Neem bijvoorbeeld $x = 1$. We weten dat $1! = 1$, $\sin(\pi/2) = 1$, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ dus

$$\zeta(-1) = (-2)\frac{1}{4\pi^2}\frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}$$

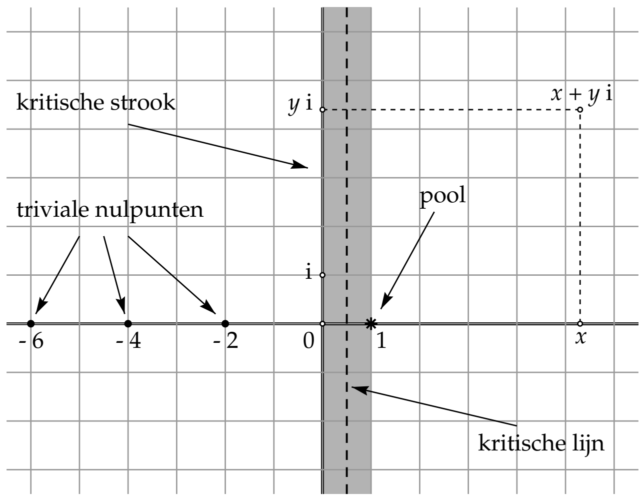
Controleer nu zelf dat $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$ en dat $\zeta(-5) = -\frac{1}{252}$. Verder is $\zeta(-2) = 0$ want voor $x = 2$ is de sinusterm in het rechterlid van (5) nul. Hetzelfde geldt voor $\zeta(-4)$, $\zeta(-6)$, $\zeta(-8)$ enzovoort. Deze nulpunten heten de *triviale nulpunten* van de zètafunctie.

Het punt $x = 0$ is een probleem, want in het rechterlid kom je dan de pool $\zeta(1)$ tegen, en daar is $\zeta(x)$ niet gedefinieerd. Maar met een limietovergang kan men bewijzen dat $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, zoals ook de grafiek van figuur 2 suggereert. In figuur 3 is een grafiek van $\zeta(x)$ getekend voor $-16,5 \leq x \leq 0$. Let op de ongelijke schaalverdelingen op de assen!

Het complexe vlak

Riemann vond zijn formidabele formule door het domein van de zètafunctie uit te breiden tot de *complexe getallen*, dat wil zeggen getallen van de vorm $z = x + y\,\mathrm{i}$. Daarmee kun je via haakjes uitwerken gewoon rekenen, als je maar gebruikt dat $\mathrm{i}^2 = -1$. Zo geldt bijvoorbeeld $(3-4\,\mathrm{i})(2+3\,\mathrm{i}) = 6+9\,\mathrm{i}-8\,\mathrm{i}-12\,\mathrm{i}^2 =$

$6 + \mathrm{i} - 12(-1) = 18 + \mathrm{i}$. Je kunt het complexe getal $z = x + y\,\mathrm{i}$ zien als het punt met coördinaten (x, y) in het vlak, dat op die manier het *complexe vlak* wordt. De getallen van de vorm $x + 0\,\mathrm{i}$ vind je op de x-as. We noteren ze gewoon als x in plaats van als $x + 0\,\mathrm{i}$. Op die manier maken de reële getallen dus deel uit van de complexe getallen.



Figuur 4: *Het complexe vlak met daarin de kritische strook* $\{0 \leq x \leq 1\}$*, de kritische lijn* $\{x = \frac{1}{2}\}$*, de pool* $z = 1$ *en de triviale nulpunten* $z = -2$*,* $z = -4$ *en* $z = -6$ *van de zètafunctie. De niet-triviale nulpunten liggen allemaal in de kritische strook, maar ze vallen buiten dit plaatje. De* Riemann-hypothese *zegt dat ze allemaal op de kritische lijn liggen.*

Riemanns zètafunctie is gedefinieerd op het gehele complexe vlak met uitzondering van de pool $z = 1$. Naast de triviale nulpunten $z = -2, -4, -6, -8, \ldots$ die we hierboven al gevonden hebben, blijken er nog oneindig veel andere nulpunten te zijn. Riemann bewees dat juist deze *niettriviale* nulpunten een cruciale rol spelen in de relatie die hij vond tussen de zètafunctie en de priemgetallentelfunctie $\pi(x)$. Hij kon aantonen dat al die nulpunten in de *kritische strook* $0 \leq x \leq 1$ moeten liggen. De *Riemann-hypothese* zegt veel meer, namelijk dat ze allemaal op de *kritische lijn* $x = \frac{1}{2}$ liggen. De *priemgetallenstelling* daarentegen is veel zwakker: die is ermee equivalent dat er geen enkel nulpunt op de lijn $x = 1$ ligt. In nummer 2 van deze jaargang hebben we de priemgetallenstelling beschreven. Een van de formuleringen ervan is

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/(\ln x)} = 1$$

Toch kon ook Riemann deze zwakkere stelling niet bewijzen; een bewijs daarvan moest wachten tot 1896.

De niettriviale nulpunten

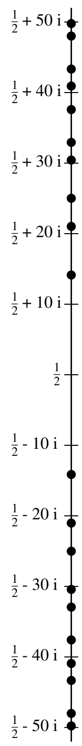
De Riemann-hypothese zelf wacht nog steeds op een bewijs of een weerlegging. Maar er is al veel over de niettriviale nulpunten bekend. Zo komen ze in paren voor: als $x + y\,\mathrm{i}$ een nulpunt is, is $x - y\,\mathrm{i}$ (het spiegelbeeld in de x-as) ook een nulpunt. Je hoeft dus alleen maar in het bovenhalfvlak te zoeken. Als er ook maar één nulpunt buiten de kritische lijn gevonden wordt, is de Riemann-hypothese weerlegd. Maar dat is nog niet gebeurd. Riemann zelf berekende de eerste nulpunten en controleerde dat ze allemaal op de kritische lijn liggen. In 1986 publiceerden Jan van de Lune, Herman te Riele en Dik Winter van het CWI in Amsterdam de resultaten van een computerproject waarin ze verifieerden dat de eerste *anderhalf miljard* nulpunten allemaal op de kritische lijn liggen. Dat gaat overigens niet zo maar, want je moet laten zien dat het reële deel van zo'n nulpunt*exact* gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Daarvoor zijn geavanceerde wiskundige technieken nodig. Anderen hebben dat werk voortgezet, en inmiddels is bekend dat de eerste honderd miljard nulpunten allemaal op de kritische lijn liggen. Nog steeds is er geen enkel niettriviaal nulpunt buiten de kritische lijn gevonden! De zoektocht lijkt vruchteloos: de Riemann-hypothese, die zegt dat ze er helemaal niet zijn, lijkt hoge ogen te gooien. Maar helaas, een *bewijs* daarvan ontbreekt nog steeds.

$\frac{1}{2} \pm 14,135\,\mathrm{i}$	$\frac{1}{2} \pm 37,586\,\mathrm{i}$
$\frac{1}{2} \pm 21,022\,\mathrm{i}$	$\frac{1}{2} \pm 40,919\,\mathrm{i}$
$\frac{1}{2} \pm 25,011\,\mathrm{i}$	$\frac{1}{2} \pm 43,327\,\mathrm{i}$
$\frac{1}{2} \pm 30,425\,\mathrm{i}$	$\frac{1}{2} \pm 48,005\,\mathrm{i}$
$\frac{1}{2} \pm 32,935\,\mathrm{i}$	$\frac{1}{2} \pm 49,773\,\mathrm{i}$

Tabel 1: *De eerste twee-maal-tien niettriviale nulpunten van de zètafunctie. De y-waarde is telkens afgerond op 3 decimalen.*

Surfen en verder lezen

Op het internet is veel over de Riemann-hypothese en de zètafunctie te vinden. Een prachtig boek dat alleen maar vwo-B voorkennis vereist, is: John Derbyshire, *Prime Obsession – Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, 2003, ISBN 0-452-28525-9.



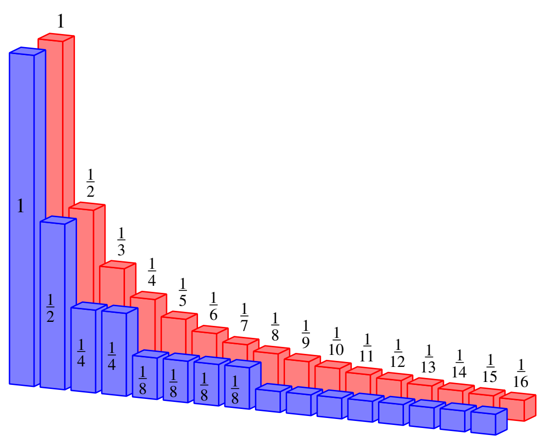
Figuur 5: *De kritische lijn met daarop de eerste twintig niet-triviale nulpunten van de zètafunctie.*

IN APART KADER PLAATSEN:

Waarom is $\zeta(1) = \infty$?

Figuur 6 laat zien dat

$$\begin{aligned}
\zeta(1) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \\
&> 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + (2 \times \frac{1}{4}) + (4 \times \frac{1}{8}) + (8 \times \frac{1}{16}) + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty
\end{aligned}$$



Figuur 6: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{16} > 1 + \frac{1}{2} + (2 \times \frac{1}{4}) + (4 \times \frac{1}{8}) + (8 \times \frac{1}{16})$