Examen VWO

2007

tijdvak 1
woensdag 16 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B1

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 20 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 82 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

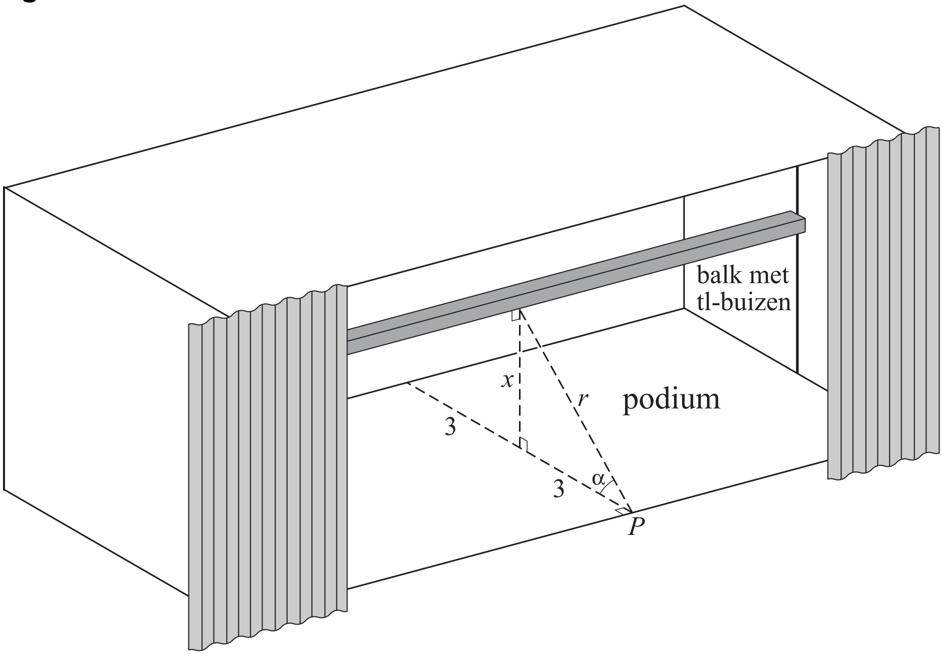
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

700025-1-018o

Podiumverlichting

Een podium is 6 meter diep. Midden boven het podium hangt een balk met tl-buizen. De verlichtingssterkte op het podium is het kleinst aan de rand, bijvoorbeeld in punt P. De afstand van P tot de balk is r meter, de hoogte van de balk boven het podium is x meter en de hoek die het kortste verbindingslijnstuk van de balk en punt P met het podium maakt is α radialen. Zie figuur 1.

figuur 1



De verlichtingssterkte op het podium in punt P noemen we V (in lux). V is omgekeerd evenredig met r en evenredig met $\sin\alpha$. Dus $V = c \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin\alpha$, waarbij de evenredigheidsconstante c afhangt van het lichtvermogen van de tl-buizen.
Voor deze balk met tl-buizen geldt: $c = 650$ (lux·m).

Er geldt: $V = \frac{650x}{9 + x^2}$.

3p **1** Toon aan dat deze formule juist is.

De balk met tl-buizen kan omhoog gehesen worden: de hoogte kan variëren van 2,0 tot 5,0 meter.

De verlichtingssterkte op het podium in punt P moet minimaal 100 lux zijn.

5p **2** Bereken langs algebraïsche weg op welke hoogtes de balk mag hangen.

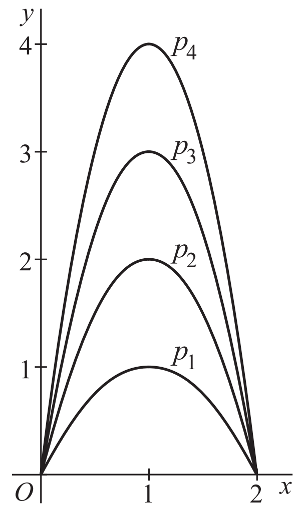
Er is een hoogte van de balk waarbij V maximaal is.

6p **3** Bereken deze hoogte langs algebraïsche weg.

Een familie parabolen

Voor $n = 1, 2, 3, ...$ is gegeven de parabool p_n: $y = n(2x - x^2)$.
In figuur 2 zijn de parabolen p_1, p_2, p_3 en p_4 getekend voor $0 \leq x \leq 2$.

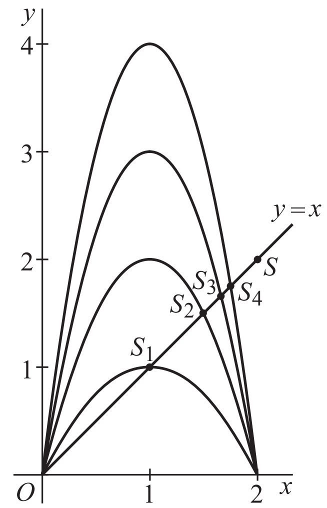
figuur 2



4p **4** Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door p_2 en p_3.

Voor $n = 1, 2, 3, ...$ snijdt de parabool p_n de lijn $y = x$ behalve in $O(0, 0)$ ook nog in een tweede punt S_n. In figuur 3 zijn S_1, S_2, S_3 en S_4 aangegeven. Hoe groter n is, des te dichter ligt S_n bij het punt $S(2, 2)$.

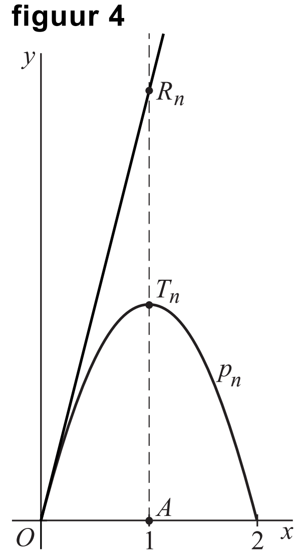
figuur 3



5p **5** Onderzoek voor welke waarden van n de x-coördinaat van S_n groter dan 1,99 is.

Voor $n = 1, 2, 3, ...$ snijdt de raaklijn in $O(0, 0)$ aan de parabool p_n de lijn $x = 1$ in het punt R_n. Zie figuur 4. Verder is A het punt (1, 0) en T_n de top van de parabool p_n.

figuur 4



5p **6** Toon aan dat voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ T_n het midden is van lijnstuk AR_n.

Twee koplampen

De levensduur van een halogeenkoplamp van een auto is normaal verdeeld met een gemiddelde van 2500 branduren en een standaardafwijking van 450 uur. Neem aan dat de levensduur van de linker koplamp van een auto en de levensduur van de rechter koplamp onafhankelijk van elkaar zijn.

3p **7** Bereken de kans dat zowel de linker als de rechter koplamp binnen 2100 branduren kapot gaat.

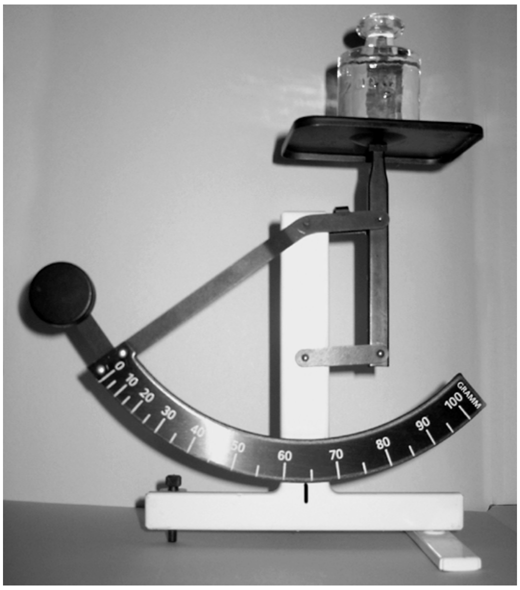
De levensduur van de rechter koplamp noemen we R en die van de linker koplamp L.
Om R en L met elkaar te vergelijken, gebruiken we de toevalsvariabele V, gedefinieerd door $V = R - L$. Als bijvoorbeeld $V = -100$, dan brandt de linker koplamp 100 uur langer dan de rechter koplamp.
V is ook normaal verdeeld, met gemiddelde 0 uur en standaardafwijking $450\sqrt{2}$ uur.

4p **8** Bereken de kans dat het verschil in levensduur van de beide koplampen kleiner is dan 20 uur.

Brievenweger

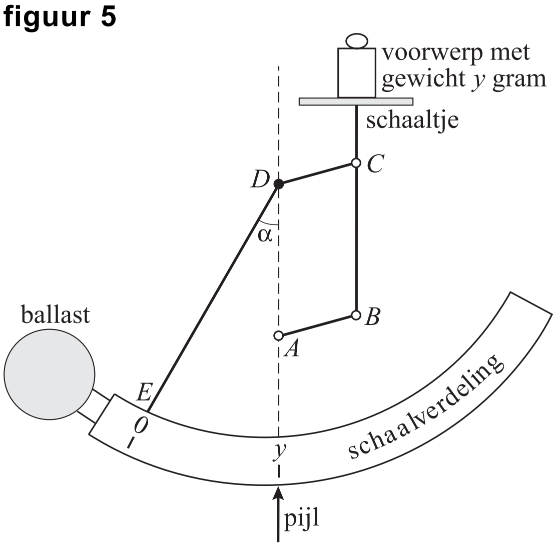
Hieronder zie je een foto van een brievenweger. Op het schaaltje staat een voorwerp met een gewicht van 64 gram.

foto



In figuur 5 is schematisch een soortgelijke brievenweger weergegeven met een voorwerp dat y gram weegt. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.
De pijl waarbij je het gewicht afleest, ligt loodrecht onder het draaipunt D. De ballast zorgt ervoor dat het verbindingsstuk DE verticaal staat als er niets op het schaaltje ligt. De verbinding tussen de stukken ED en DC is vast.

figuur 5



Als een voorwerp van y gram op het schaaltje geplaatst wordt, draait het verbindingsstuk CDE om punt D over een hoek van α radialen. De cirkelvormige schaalverdeling en de ballast draaien ook en de pijl wijst op de schaalverdeling het getal y aan. Het schaaltje blijft horizontaal door de scharnieren in de punten A, B en C. Zie figuur 5.

Bij deze brievenweger kan met behulp van statica de formule $y = 70\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi)}$ afgeleid worden (α in radialen).

3p **9** Bepaal door meten en berekenen de waarde van y. Gebruik daarvoor de figuur op de uitwerkbijlage. Rond je antwoord af op een gehele waarde. Licht je antwoord toe.

4p **10** Bereken exact de waarde van α waarvoor geldt $y = 70$.

Voor de afgeleide $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}$ geldt de formule $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha} = \dfrac{70\sin(\frac{1}{4}\pi)}{\sin^2(\alpha + \frac{1}{4}\pi)}$.

4p **11** Toon dit aan.

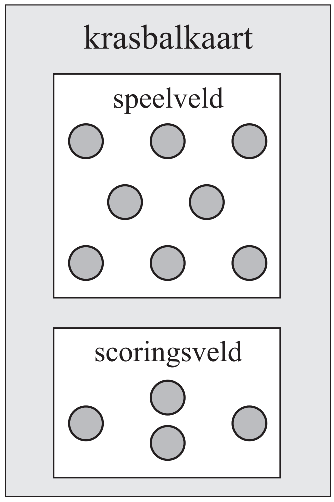
Op de schaalverdeling kun je alle streepjes van 1, 2, 3, … tot 100 gram aangeven. De onderlinge afstanden tussen die streepjes zijn verschillend. In de buurt van een zekere waarde van α liggen de streepjes het verst van elkaar. Bij deze waarde van α is $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}$ minimaal.

3p **12** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de waarde van α waarvoor $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}$ minimaal is.

Krasbal

In 2001 werd het spel “krasbal” geïntroduceerd. Het spel werd op één speelkaart door twee spelers gespeeld. In deze opgave is de speelkaart ("krasbalkaart") sterk vereenvoudigd.
In figuur 6 zie je de krasbalkaart, bestaande uit het "speelveld" en het "scoringsveld". In het speelveld zijn acht vakjes die kunnen worden open gekrast: vier met de letter V (van balVerlies) en vier met de letter P (van doelPoging). In het scoringsveld zijn vier vakjes die kunnen worden open gekrast: twee met de letter D (van Doelpunt) en twee met de letter M (van Misser).

figuur 6



4p **13** Hoeveel verschillende krasbalkaarten zijn er mogelijk?

Het spel wordt als volgt gespeeld:
- als een speler aan de beurt is, krast hij eerst een vakje in het speelveld open;
- als hij in het speelveld
  - een V open krast, gaat de beurt naar zijn tegenstander,
  - een P open krast, gaat hij verder naar het scoringsveld;
- als hij in het scoringsveld
  - een D open krast, heeft hij de wedstrijd gewonnen en stopt het spel,
  - een M open krast, gaat de beurt naar zijn tegenstander.

Het aantal hokjes dat in een wedstrijd wordt open gekrast, is de lengte van de wedstrijd.

4p **14** Wat zijn de kleinste en de grootste lengte die een wedstrijd kan hebben? Licht je antwoorden toe.

4p **15** Bereken de kans dat een wedstrijd lengte 4 heeft.

Ruud en Patrick spelen het krasbalspel vaak. Het valt Patrick op dat, als Ruud mag beginnen, hij bijna altijd een P open krast. Het lijkt wel alsof Ruud kan zien wat er in een vakje staat! Patrick gaat in de komende tien spellen die Ruud mag beginnen, bijhouden hoe vaak het eerste vakje dat Ruud open krast een P is. Als dit er acht of meer zijn, zal hij Ruud van vals spel beschuldigen.
4p **16** Bereken de kans dat hij Ruud ten onrechte van vals spel zal beschuldigen.

De functie $f(x) = e^x$

Op de grafiek van de functie $f(x) = \mathrm{e}^x$ liggen de punten A en B met x-coördinaten a en $a+1$. Zie figuur 7.

Het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de horizontale lijn door B en de verticale lijn door A is in figuur 7 grijs aangegeven.

4p **17** Bereken exact de waarde van a waarvoor de oppervlakte van dit gebied gelijk is aan 3.

Als a toeneemt, neemt de richtingscoëfficiënt van de lijn AB ook toe.

4p **18** Bereken voor welke waarden van a de richtingscoëfficiënt van AB kleiner dan 1 is. Rond in je antwoord de grenswaarde af op twee decimalen.

In de volgende vragen is $a = 1$, dus A is het punt $(1, \mathrm{e})$ en B is het punt $(2, \mathrm{e}^2)$.

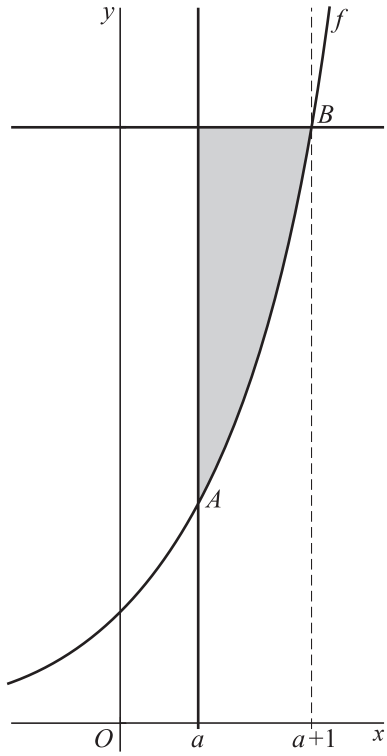
4p **19** Bereken de lengte van de grafiek van f tussen A en B.

P en Q zijn de loodrechte projecties van A op de x-as en de y-as. De rechthoek $OPAQ$ wordt door de grafiek van f verdeeld in twee stukken. Zie figuur 8.

Beide stukken wentelen we om de x-as.

5p **20** Toon aan dat de twee omwentelingslichamen niet dezelfde inhoud hebben.

figuur 7



figuur 8