Uitwerkingen toets 2009

Opgave 1. Zij $n \geq 10$ een geheel getal. We schrijven n in het tientallig stelsel. Zij $S(n)$ de som van de cijfers van n. Een *stomp* van n is een positief geheel getal dat verkregen is door een aantal (minstens één, maar niet alle) cijfers van n aan het rechteruiteinde weg te halen. Bijvoorbeeld: 23 is een stomp van 2351. Zij $T(n)$ de som van alle stompen van n. Bewijs dat $n = S(n) + 9 \cdot T(n)$.

Oplossing. Van rechts naar links geven we de cijfers van n aan met $a_0, a_1, \ldots, a_k$. Er geldt dus

$$n = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^k a_k.$$

Een stomp van n bestaat van rechts naar links uit de cijfers $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_k$ waarbij $1 \leq i \leq k$. Zo'n stomp is dan gelijk aan $a_i + 10a_{i+1} + \cdots + 10^{k-i}a_k$. Als we dit sommeren over alle i, krijgen we $T(n)$. We kunnen vervolgens $T(n)$ makkelijker schrijven door alle termen met a_1 samen te nemen, alle termen met a_2, enzovoorts (dit komt hieronder neer op het verwisselen van de sommatietekens: eerst sommeren over i van 1 tot en met k en daarna per i nog over j van i tot en met k, is hetzelfde als eerst sommeren over j van 1 tot en met k en daarna per j nog over i van 1 tot en met j):

$$T(n) = \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + 10a_{i+1} + \cdots + 10^{k-i}a_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i}^{k} 10^{j-i} a_j$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{j} 10^{j-i} a_j = \sum_{j=1}^{k} \left(1 + 10 + \cdots + 10^{j-1}\right) a_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{10^j - 1}{10 - 1} a_j.$$

In de laatste stap hebben we de somformule voor de meetkundige reeks gebruikt. We krijgen nu

$$9 \cdot T(n) = \sum_{j=1}^{k} (10^j - 1) a_j = \sum_{j=0}^{k} (10^j - 1) a_j.$$

Bedenk nu dat $S(n) = \sum_{j=0}^{k} a_j$. Er geldt dus

$$S(n) + 9 \cdot T(n) = \sum_{j=0}^{k} (10^j - 1 + 1) a_j = \sum_{j=0}^{k} 10^j a_j = n.$$

$\square$

Opgave 2. Zij ABC een driehoek, punt P het midden van BC en punt Q op lijnstuk CA zodat $|CQ| = 2|QA|$. Zij S het snijpunt van BQ en AP. Bewijs dat $|AS| = |SP|$.

Oplossing I. Trek een lijn door P evenwijdig aan AC en zij T het snijpunt van deze lijn met BQ. Dan is PT een middenparallel in driehoek BCQ, dus geldt $|PT| = \frac{1}{2}|CQ| = |QA|$. Nu is $ATPQ$ een vierhoek met een paar even lange, evenwijdige zijden, dus $ATPQ$ is een parallellogram. Van een parallellogram weten we dat de diagonalen elkaar middendoor snijden, dus $|AS| = |SP|$. $\square$

Oplossing II. We passen de stelling van Menelaos toe in driehoek PCA. We weten dat de punten B, S en Q op één lijn liggen, dus

$$-1 = \frac{PB}{BC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AS}{SP} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{AS}{SP} = -\frac{AS}{SP}.$$

Dus $\frac{AS}{SP} = 1$, waaruit volgt dat S midden tussen A en P ligt. $\square$

Oplossing III. Zij M het midden van QC en noem $x = [AQS] = [QMS] = [MCS]$ en $y = [CPS] = [PBS]$. Omdat $[CPA] = [PBA]$ geldt dat $[ASB] = 3x$. Maar dan is $[AQB] = x + 3x$ terwijl anderzijds $2[AQB] = [QCB]$, dus $2x + 2y = [QCB] = 2[AQB] = 8x$. Dus $y = 3x$. Maar dan $[ASB] = 3x = y = [SPB]$, dus $|AS| = |SP|$. $\square$

Oplossing IV. Zij R het snijpunt van CS en AB. Volgens de stelling van Ceva geldt

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1,$$

waaruit volgt $2|AR| = |RB|$. Zij $a = [PSC]$, $b = [QSC]$, $c = [QSA]$, $d = [RSA]$, $e = [RSB]$ en $f = [PSB]$. Nu geldt

$$b + a + f = 2(c + d + e) \quad \text{en} \quad a + e + f = 2(b + c + d),$$

waaruit volgt

$$b - e = 2e - 2b,$$

dus $b = e$. Verder geldt $2d = e$ en $2c = b$, dus ook $c = d$ en $c + d = e$. Uit $a + e + f = 2(b + c + d)$ volgt nu

$$a + f \ = \ b + 2c + 2d \ = \ b + c + d + e,$$

dus

$$2(a + f) \ = \ a + b + c + d + e + f \ = \ [ABC].$$

Dus $2|PS| = |PA|$, dus $|PS| = |AS|$. $\square$

Opgave 3. Laat a, b en c positieve reële getallen zijn die voldoen aan $a+b+c \geq abc$. Bewijs dat

$$a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3}\, abc.$$

Oplossing. We weten dat $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ en dus $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$. Wegens de ongelijkheid van het meetkundig en rekenkundig gemiddelde geldt $a+b+c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}$ en anderzijds is gegeven dat $a+b+c \geq abc$. Dus we hebben twee ongelijkheden:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &\geq \tfrac{1}{3}(a+b+c)^2 \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}}, \\ a^2+b^2+c^2 &\geq \tfrac{1}{3}(a+b+c)^2 \geq \tfrac{1}{3}(abc)^2. \end{aligned}$$

We doen de eerste ongelijkheid tot de macht $\frac{3}{4}$ en de tweede tot de macht $\frac{1}{4}$ (en dit mogen we doen omdat alles positief is):

$$\begin{aligned} (a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{4}} &\geq 3^{\frac{3}{4}}(abc)^{\frac{1}{2}}, \\ (a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{4}} &\geq 3^{-\frac{1}{4}}(abc)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nu vermenigvuldigen we deze beide en dan krijgen we

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3^{\frac{1}{2}}(abc),$$

wat het gevraagde is. $\square$

Opgave 4. Vind alle functies $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die voldoen aan

$$f(m+n) + f(mn-1) = f(m)f(n) + 2$$

voor alle $m, n \in \mathbb{Z}$.

Oplossing. Stel eerst dat er een $c \in \mathbb{Z}$ is met $f(n) = c$ voor alle n. Dan hebben we $2c = c^2 + 2$, dus $c^2 - 2c + 2 = 0$ en dat heeft geen oplossing voor c. Dus is f niet constant. Vul nu in $m = 0$. Dat geeft $f(n) + f(-1) = f(n)f(0) + 2$, waaruit we concluderen dat $f(n)(1 - f(0))$ een constante is. Omdat $f(n)$ niet constant is, volgt hieruit $f(0) = 1$. Uit dezelfde vergelijking krijgen we nu $f(-1) = 2$. Vul nu in $m = n = -1$, dat geeft $f(-2) + f(0) = f(-1)^2 + 2$, waaruit volgt $f(-2) = 5$. Vul vervolgens in $m = 1$ en $n = -1$, dan krijgen we $f(0) + f(-2) = f(1)f(-1) + 2$, waaruit volgt $f(1) = 2$.
Vul nu in $m = 1$, dan krijgen we $f(n+1) + f(n-1) = f(1)f(n) + 2$, ofwel

$$f(n+1) = 2f(n) + 2 - f(n-1).$$

Met inductie bewijzen we nu gemakkelijk dat $f(n) = n^2 + 1$ voor alle $n \geq 0$ en vervolgens met de vergelijking

$$f(n-1) = 2f(n) + 2 - f(n+1)$$

ook voor $n \leq 0$. Dus $f(n) = n^2 + 1$ voor alle n en deze functie voldoet. $\square$

Opgave 5. Van een gegeven n-hoek met alle zijden even lang hebben alle hoekpunten rationale coördinaten. Bewijs dat n even is.

Oplossing. Laat (x_1, y_1), …, (x_n, y_n) de coördinaten van de hoekpunten van de n-hoek zijn. Definieer $a_i = x_{i+1} - x_i$, $b_i = y_{i+1} - y_i$ voor $i = 1, 2, \ldots, n$, waarbij $x_{n+1} = x_1$ en $y_{n+1} = y_1$. Gegeven is nu dat $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ en $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 0$; en de som $a_i^2 + b_i^2$ is voor alle i gelijk. Door alle noemers weg te vermenigvuldigen en eventuele gemeenschappelijke delers van de tellers weg te delen, mogen we aannemen dat $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ en $\mathrm{ggd}(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) = 1$. Zij c het gehele getal zodat $a_i^2 + b_i^2 = c$ voor alle i.
Stel eerst dat $c \equiv 1 \mod 2$. Dan is voor elke i precies één van a_i, b_i oneven. Dus van alle $2n$ getallen a_i, b_i zijn er precies n even en n oneven. Dus $0 = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) \equiv n \mod 2$. Dus n is even.
Stel nu dat $c \equiv 0 \mod 2$. Dan geldt voor alle i dat $a_i \equiv b_i \mod 2$. Als er een i is met a_i en b_i allebei oneven, dan is $c = a_i^2 + b_i^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \mod 4$. Als er een i is met a_i en b_i allebei even, dan is $c = a_i^2 + b_i^2 \equiv 0 + 0 \equiv 0 \mod 4$. Dit kan niet allebei tegelijk. Dus óf alle a_i en b_i zijn oneven, óf alle a_i en b_i zijn even. Het laatste is een tegenspraak met onze aanname over de ggd van alle a_i en b_i. Het eerste geeft $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \equiv n \bmod 2$, dus n is even. $\square$