Samenvatting

Deze samenvatting is bedoeld voor mijn moeder – en alle andere lezers die niet veel van wiskunde weten, maar wel graag willen zien waar ik de afgelopen jaren aan heb gewerkt. Wiskundigen verwijs ik graag door naar Hoofdstuk I. Daar staan definities van de gebruikte begrippen, klassieke stellingen en de belangrijkste resultaten uit dit proefschrift.

1. Hoeveel decimalen van π ken je?

Han, o lief, o zoete hartedief...

Bovenstaande dichtregel is niet alleen een liefdesverklaring, het is ook een ezelsbruggetje om de eerste decimalen van $\pi = 3{,}14159265358\ldots$ (de verhouding tussen de omtrek van een cirkel en zijn diameter) te onthouden. Tel maar eens het aantal letters van de woorden. Er zijn veel meer van dit soort ezelsbruggetjes in allerlei talen:

```
How  I wish  I could  recollect pi easily  today ...
Sol  y Luna  y Cielo  proclaman al Divino  Autor del Cosmo ...
Wat  u door 'n goede  ezelsbrug te kennen  immer met gemak onthoudt ...
How  I want  a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures ...
3    1 4     1 5      9         2 6        5     3   5     8 ...
```

Eigenlijk heeft π oneindig veel decimalen achter de komma. Wat betekent het als je alleen de eerste vijf decimalen van π gebruikt? Je benadert π dan met $\frac{314159}{100000} = 3{,}14159$.

Misschien herinner je je een andere benadering van π die vaak gebruikt wordt op school: $\frac{22}{7} \approx 3{,}14285714$. Deze breuk met een heel kleine noemer (7) benadert de eerste twee decimalen van π. Archimedes gebruikte deze benadering al rond 200 voor Christus, maar het kan nog veel beter. Bijvoorbeeld met de breuk $\frac{355}{113}$. Die is ongeveer gelijk aan 3,14159292 en benadert π op maar liefst zes decimalen. Deze benadering is zo goed, dat geen enkele breuk met noemer kleiner dan 16604 dichter bij π ligt. Hulde dus voor de Chinese wiskundige Zu Chongzhi die in 480 (zo'n vier jaar na de val van het Romeinse rijk) met veel moeite deze benadering vond.

Archimedes en Chongzhi vonden hun benaderingen voor π door veelhoeken in cirkels te tekenen. Maar je kunt voor elk willekeurig getal goede benaderingen maken met *kettingbreuken.*

2. Wat is een kettingbreuk?

Een kettingbreuk is een breuk in een breuk in een breuk, enzovoorts. Zo ziet de kettingbreuk voor π er bijvoorbeeld uit:

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\dots}}}}.$$

In de breuk heb je steeds een 1, een deelstreep, een positief geheel getal en dan weer een nieuwe breuk die begint met een 1. Dit soort kettingbreuken noemen we *reguliere* kettingbreuken. We noteren het getal voor de breuk met a_0, voor π geldt dus $a_0 = 3$. De positieve gehele getallen in de breuk noteren we als $a_1, a_2, a_3, \dots$. In het voorbeeld hierboven geldt $a_1 = 7, a_2 = 15, a_3 = 1$ en $a_4 = 292$.

Een getal dat geen breuk is, kun je op precies één manier schrijven als een oneindig lange kettingbreuk. Zulke getallen noemen we *irrationaal*.[1]

3. Hoe haal je benaderingen uit een kettingbreuk?

Als je de oneindig lange kettingbreuk afkapt, krijg je een *benaderingsbreuk*. Je neemt alleen het eerste deel en schrijft dat als een gewone breuk. Laten we eens kijken wat we dan vinden voor π. We noteren voortaan alleen de eerste acht cijfers achter de komma.

$$\begin{array}{llcll}
 & \pi & & \approx & \mathbf{3{,}14159265} \\
1) & 3+\frac{1}{7} & = \frac{22}{7} & \approx & \mathbf{3{,}14}285714 \\
2) & 3+\cfrac{1}{7+\frac{1}{15}} & = \frac{333}{106} & \approx & \mathbf{3{,}1415}0943 \\
3) & 3+\cfrac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1}}} & = \frac{355}{113} & \approx & \mathbf{3{,}141592}92
\end{array}$$

We zien hier de twee eeuwenoude benaderingen $\frac{22}{7}$ en $\frac{355}{113}$ tevoorschijn komen.

Voor een willekeurig getal x schrijven we de benaderingen die we op deze manier vinden als $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$. In het algemeen noemen we de benadering die we vinden door de eerste n termen van de kettingbreuk te gebruiken $\frac{p_n}{q_n}$.

[1] Kijk eens voor een mooi bewijs dat $\sqrt{2}$ geen breuk is op `http://nl.wikipedia.org/wiki/Bewijs_dat_wortel_2_irrationaal_is`.

4. Hoe maak je zo'n kettingbreuk?

Neem een willekeurig irrationaal getal dat je wilt benaderen (zoals net bijvoorbeeld $\pi = 3{,}14152965\ldots$). Het deel voor de komma is al een geheel getal, dus dat hoef je niet te benaderen. Noem het niet-gehele deel achter de komma x. Het recept om die kettingbreuk te maken is eenvoudiger dan dat voor saltimbocca:

> Bereken $\frac{1}{x}$ en neem het gehele deel van $\frac{1}{x}$ als volgende getal a in je kettingbreuk. Zet $x = \frac{1}{x} - a$ en begin opnieuw.

Wiskundigen noemen zo'n recept een *algoritme*.

Als voorbeeld maken we de kettingbreuk voor $\pi = 3{,}14159265\ldots$. We passen het recept toe op $\pi - 3 = 0{,}14159265\ldots$.

Stap 1) geeft $\frac{1}{0{,}14159265\ldots} = 7{,}06251330\ldots$, dus $a_1 = 7$.
We zetten $x = 0{,}06251330\ldots$.

Stap 2) geeft $\frac{1}{0{,}06251330\ldots} = 15{,}99659440\ldots$, dus $a_2 = 15$.
We zetten $x = 0{,}99659440\ldots$.

Stap 3) geeft $\frac{1}{0{,}99659441\ldots} = 1{,}00341723\ldots$, dus $a_3 = 1$.
We zetten $x = 0{,}00341723\ldots$.

Enzovoorts.

We vinden $\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$.

Je kunt dit voor elk irrationaal getal doen en nu bijvoorbeeld zelf narekenen dat voor $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356$ de kettingbreuk wordt gegeven door

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}.$$

5. Waarom werkt het recept om kettingbreuken te maken?

Wiskundigen gebruiken in plaats van het bovenstaande recept graag een functie $T(x)$. Je kunt het recept namelijk ook beschrijven als het steeds herhalen van $T(x) = \frac{1}{x} - a(x)$, oftewel $x = \frac{1}{a(x)+T(x)}$, waarbij $a(x)$ het gehele deel van $\frac{1}{x}$ is.

Voor de eerste stap geldt dus:

$$T(x) = \frac{1}{x} - a_1 \quad \text{oftewel} \quad x = \frac{1}{a_1 + T(x)}$$

In de volgende stap pas je T toe op $T(x)$ en krijg je

$$T(T(x)) = \frac{1}{T(x)} - a(T(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x} - a_1} - a_2 \quad \text{oftewel} \quad x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + T(T(x))}}.$$

Zo ga je verder en je ziet hoe de kettingbreuk zich na elke stap een stukje verder uitrolt.

6. Wat is een goede benadering?

In het voorbeeld hierboven kwam je met elke stap dichter bij π. Dat is altijd zo bij het kettingbreukalgoritme: elke benadering $\frac{p_n}{q_n}$ ligt dichter bij x dan de vorige benadering $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Of zoals wiskundigen het schrijven

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|;$$

waarbij $|\,|$ staat voor het nemen van de absolute waarde. De limiet van de benaderingsbreuken $\frac{p_n}{q_n}$ is x.

Neem nu een willekeurige breuk $\frac{p}{q}$ die dicht bij x ligt. Wanneer noem je deze breuk een goede benadering van x? Het ligt voor de hand om de noemer van de breuk mee te nemen in de kwaliteit. Het is natuurlijk veel makkelijker om dicht bij x te komen als je een breuk met noemer 100.000.000 neemt, dan wanneer je een breuk met noemer 10 gebruikt.

Een veel gebruikte maat voor de kwaliteit van een benadering is de noemer in het kwadraat keer het verschil tussen x en de breuk $\frac{p}{q}$, in wiskundige notatie

$$q^2 \left| x - \frac{p}{q} \right|.$$

Een benadering is goed als de kwaliteit zo klein mogelijk is: dan heb je zowel een kleine noemer als een korte afstand tot x. In tegenstelling tot de Consumentenbond geven we dus breuken met een *lage* kwaliteit het predicaat ‘beste keus’.

Het blijkt dat hoe groter een getal a in de kettingbreuk is, des te beter de benadering is die je krijgt door net daarvoor af te kappen. In het voorbeeld met π hebben we $a_2 = 15, a_3 = 1$ en $a_4 = 292$. Als we afkappen voor $a_2 = 15$ dan krijgen we als benadering $\frac{22}{7}$ met kwaliteit van ongeveer 0,062. Afkappen voor $a_3 = 1$ geeft $\frac{333}{106}$ en die doet het met een kwaliteit van 0,94 minder goed. Als we afkappen voor de grote $a_4 = 292$, dan krijgen we Chongzi’s benadering $\frac{355}{113}$ en die heeft een spectaculaire kwaliteit van 0,0034.

7. Waar vind je die goede benaderingen?

We zagen hierboven dat de kwaliteit van de benaderingen steeds tussen de nul en één lag. Dit is altijd waar, voor elke kettingbreukbenadering van welk irrationaal getal dan ook. Het is helemaal niet zo vanzelfsprekend dat een benadering zulke goede kwaliteit heeft. De benadering $\frac{314159}{100000}$ voor π heeft bijvoorbeeld kwaliteit 26535,9.

Het is dus bijzonder dat het kettingbreukalgoritme alleen maar benaderingen met kwaliteit kleiner dan één vindt.

Kan het nu zo zijn dat er breuken bestaan die ontzettend goede benaderingen zijn, maar die het kettingbreukalgoritme per ongeluk níet vindt? Legendre bewees in 1798 (het jaar dat Napoleons troepen Egypte binnentrokken) dat dit niet kan.

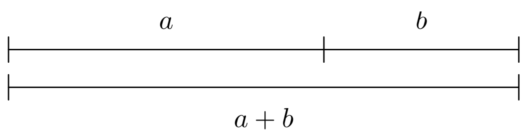
Stelling 1. *Als* $\frac{p}{q}$ *een breuk is die* x *benadert met een kwaliteit van minder dan* $\frac{1}{2}$*, dan wordt deze breuk gevonden door het kettingbreukalgoritme.*

Kortom: alle echt goede benaderingen worden gevonden door het kettingbreukalgoritme.

Borel bewees in 1905 (het jaar waarin Albert Einstein zijn speciale relativiteitstheorie publiceerde) dat bovendien één in elke drie opeenvolgende benaderingen heel goed is.

Stelling 2. *Voor elke irrationale* x *en voor elke drie willekeurige achtereenvolgende kettingbreukbenaderingen geldt dat het minimum van de drie bijbehorende kwaliteiten kleiner is dan* $\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0{,}44721$. *De constante kan niet vervangen worden door een kleinere.*

Voor elke constante kleiner dan $\frac{1}{\sqrt{5}}$ bestaan er getallen x waarvoor je geen drie opeenvolgende benaderingen kunt aanwijzen die elk kwaliteit kleiner dan die constante hebben. De *gulden snede* φ is een voorbeeld van zo'n getal waarbij het dan misgaat. De gulden snede is de beroemde 'mooie' verdeling van een lijnstuk in twee stukken, zie Figuur 1.



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \varphi \approx 1{,}618\ldots$$

Figuur 1. Bij een lijnstuk dat verdeeld is volgens de gulden snede verhoudt het grootste van de twee delen zich tot het kleinste, zoals het gehele lijnstuk zich verhoudt tot het grootste deel. Als we het langste stuk a noemen en het kortste b, dan hebben we $\varphi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$. We vinden dat $a = b\varphi$ en invullen in $\varphi = \frac{a+b}{a}$ geeft $\varphi = \frac{b\,\varphi+b}{b\,\varphi} = \frac{\varphi+1}{\varphi}$. Dus $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. Oplossen van deze vergelijking (bijvoorbeeld met de abc-formule) geeft als enige positieve oplossing $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803399$.

We kunnen de kettingbreuk voor de gulden snede zonder het kettingbreukenrecept maken. Uit de vergelijking $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ concluderen we dat $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. Door aan de rechterkant herhaaldelijk $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ in te vullen is de kettingbreuk van de gulden snede makkelijk te vinden:

$$\varphi = 1+\frac{1}{\varphi} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}}}}.$$

We zien dat de kettingbreuk van de gulden snede uit alleen maar enen bestaat, daarom zijn de benaderingen de slechtst mogelijke.

Hurwitz bewees in 1891 (het jaar waarin Stanford University zijn deuren opende) de volgende stelling.

Stelling 3. *Voor elke irrationale x bestaan er oneindig veel breuken p/q die x met kwaliteit kleiner dan $\frac{1}{\sqrt{5}}$ benaderen:*

$$q^2\left|x-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

De constante kan niet worden vervangen door een kleinere.

Merk op dat de stelling van Hurwitz direct volgt uit de resultaten van Legendre en Borel omdat $\frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$.

8. Is dit hét kettingbreukalgoritme?

Hierboven maakten we de kettingbreuk voor x door steeds het gehele deel van $\frac{1}{x}$ te nemen. Maar we kunnen ook andere kettingbreuken maken. Bijvoorbeeld door $\frac{1}{x}$ af te ronden naar het dichtstbijzijnde gehele getal. Bij het benaderen van π kregen we in Stap 2) bijvoorbeeld $\frac{1}{0{,}06251330\dots} \approx 15{,}99659441$, toen namen we $a_2 = 15$. Zou het niet logischer zijn om af te ronden naar 16? Als we dat consequent doen, dan krijgen we voor π de volgende dichtstbijzijnde-gehele-getallen-kettingbreuk

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16-\cfrac{1}{294+\dots}}}.$$

Afkappen geeft als eerste benaderingen $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ en $\frac{104348}{33215}$. Deze kettingbreuk slaat de slechte benadering $\frac{333}{106}$ over, maar elke benadering die wordt gevonden, is er één die het reguliere kettingbreukalgoritme ook vindt. Het reguliere kettingbreukalgoritme vindt dus meer benaderingen.

Wie wiskundigen kent, weet dat zij het liefste alles, altijd en overal generaliseren. Dit leidt tot een op het eerste gezicht wat bizarre versie van het kettingbreukalgoritme: α-Rosen-kettingbreuken. In plaats van $\frac{1}{x}$ af te ronden, nemen we hierbij het gehele deel van $\left|\frac{1}{\lambda x}\right| + 1 - \alpha$, waarbij $\lambda = 2\cos\frac{\pi}{q}$ (voor een geheel getal $q \geq 3$) en waarbij α een reëel getal is tussen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{\lambda}$. Deze kettingbreuken bestuderen we in Hoofdstuk III en IV van dit proefschrift. In 1954 (het jaar dat zowel *Lord of the flies* als *Lord of the rings* uitkwamen) introduceerde David Rosen de naar hem genoemde Rosen-kettingbreuken (met $\alpha = \frac{1}{2}$) om eigenschappen van bepaalde groepen te bestuderen. De stap naar α-Rosen-kettingbreuken is veel recenter: deze breuken werden slechts twee jaar geleden voor het eerst onderzocht door Dajani, Kraaikamp en Steiner.

Het grote voordeel van α-Rosen-kettingbreuken is dat ze allerlei andere soorten kettingbreuken omvatten. Als je een eigenschap van α-Rosen-kettingbreuken bewijst, dan heb je die eigenschap bijvoorbeeld ook onmiddellijk bewezen voor gewone kettingbreuken.

9. Hoe houd je alle informatie bij?

We kijken vanaf nu alleen naar irrationale getallen tussen 0 en 1. We benaderen immers toch alleen het niet-gehele deel van een getal met een kettingbreuk. Omdat het wat onhandig is om $\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$ te schrijven, introduceren we de kortere notatie $[a_1, a_2, a_3, \dots]$.

Als je het kettingbreukalgoritme steeds herhaalt, dan zagen we hierboven hoe je één voor één de getallen a_i krijgt. Maar verder raak je alle informatie over de rest van de kettingbreuk kwijt. Daarom introduceren we twee kettingbreuken: de *toekomst* t_n en het *verleden* v_n op plaats n.

$$t_n = [a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots] \quad \text{and} \quad v_n = [a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1].$$

De toekomst representeert alles wat er na a_n komt en omgekeerd representeert het verleden juist alles wat er tot en met a_n kwam.

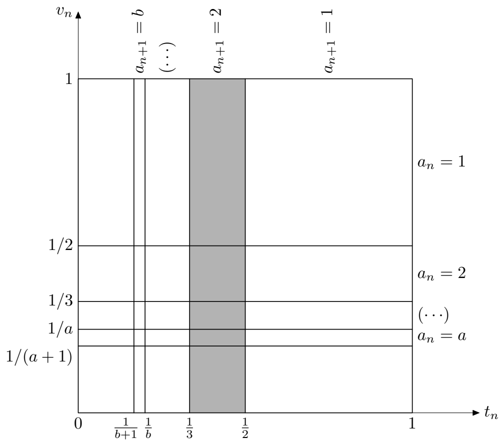
We gebruiken een twee-dimensionale functie $\mathcal{T}$ die (t_n, v_n) naar (t_{n+1}, v_{n+1}) stuurt. Zo blijft alle informatie bewaard: om van t_n naar t_{n+1} te gaan, hoef je alleen de eerste term a_{n+1} weg te gooien. Om van v_n naar v_{n+1} te gaan, moest je juist a_{n+1} aan het begin toevoegen.

In dit proefschrift maak ik veel gebruik van een meetkundige methode op het grootste gebied waarop $\mathcal{T}$ netjes werkt. We noemen dit de *natuurlijke uitbreiding*. We tekenen de natuurlijke uitbreiding in een assenstelsel met t_n op de x-as en v_n op y-as. Voor reguliere kettingbreuken is het een vierkant met zijde 1, zie figuur 2.

Voor de andere soorten kettingbreuken in dit proefschrift is de natuurlijke uitbreiding wat ingewikkelder, zie figuur 4 voor voorbeelden voor α-Rosen kettingbreuken.

10. Heb je ook kettingbreuken in hogere dimensies?

Als je wiskundigen wilt uitdagen, dan kun je altijd vragen of hun resultaten nog zijn uit te breiden, bijvoorbeeld naar hogere dimensies. Bij kettingbreuken is dit een pijnlijk punt. Er zijn namelijk wel allerlei generalisaties voor hogere dimensies, maar die hebben lang niet zulke mooie eigenschappen als het reguliere kettingbreukalgoritme.



FIGUUR 2. De natuurlijke uitbreiding voor reguliere kettingbreuken. Op de getekende horizontale strips is a_n constant, op elke verticale strip is a_{n+1} constant. In de grijze strip geldt bijvoorbeeld dat $t_n = \frac{1}{a_{n+1}+\dots}$ groter is dan $\frac{1}{3}$ en kleiner dan $\frac{1}{2}$. Dus deze strip bevat alle punten (t_n, v_n) waarvoor $a_{n+1} = 2$.

Bij reguliere kettingbreuken zoeken we voor een willekeurige x een breuk $\frac{p}{q}$ die dicht bij x ligt. In hogere dimensies kunnen we de volgende twee kanten op.

De eerste optie is om niet één maar meer getallen te benaderen met breuken met dezelfde noemer. Je hebt dan een aantal (zeg m) irrationale getallen $x_1, x_2, \dots, x_m$ en zoekt $m+1$ gehele getallen $p_1, p_2, \dots, p_m$ en q zodat de breuk $\frac{p_1}{q}$ dicht bij x_1 ligt, $\frac{p_2}{q}$ dicht bij x_2, enzovoorts.

De tweede optie is om voor een aantal (zeg n) getallen $x_1, x_2, \dots, x_n$ in totaal $n+1$ gehele getallen $p, q_1, \dots, q_n$ te zoeken zodat $q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n$ dicht bij p ligt.

Je kunt de twee opties combineren door voor $m \times n$ gegeven getallen $x_{11}, \dots, x_{mn}$ te zoeken naar $m+n$ gehele getallen $p_1, p_2, \dots, p_m$ en $q_1, \dots, q_n$ zodat de som $q_1x_{i1} + q_2x_{i2} + \dots + q_nx_{in}$ dicht bij p_i ligt voor elke i tussen 1 en m. Meerdimensionale benaderingen hebben toepassingen van jpeg-compressie tot het oplossen van optimaliseringsproblemen.

Nu nemen we voor de kwaliteit het grootste verschil tussen één van de i sommen en de bijbehorende p_i, vermenigvuldigd met de grootste van de q_j's tot de macht m/n. Of zoals wiskundigen het schrijven:

$$q^{\frac{m}{n}} \max_i |q_1\, x_{i1} + \dots + q_m\, x_{im} - p_i| \qquad \text{waarbij} \quad q = \max_j |q_j|.$$

Een benadering heet weer goed als de kwaliteit klein is. Als $m = n = 1$, dan is dit precies de kwaliteit van een benadering die we eerder gebruikten.

In 1842 (het jaar dat *Nabucco* van Verdi in première ging) bewees Dirichlet het volgende.

Stelling 4. *Voor elke gegeven* $x_{11}, \ldots, x_{mn}$ *bestaan er oneindig veel benaderingen met kwaliteit kleiner dan 1.*

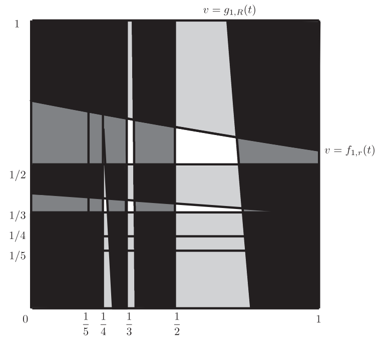
Voor de wiskundigen die dit toch stiekem lezen: we nemen aan dan er minstens één i *is waarvoor* $1, x_{i1}, \ldots, x_{im}$ *lineair onafhankelijk zijn over* $\mathbb{Q}$.

Dirichlet bewees deze stelling met zijn beroemde ladenprincipe: als je meer dan n balletjes verdeelt over n laden, dan is er minstens één lade met meer dan één balletje erin. Zijn bewijs geeft helaas geen goede methode om benaderingen met kwaliteit kleiner dan 1 te vinden. Ruim 150 jaar later hebben we nog steeds geen efficiënt algoritme gevonden om alle benaderingen met kwaliteit kleiner dan 1 te geven. Behalve als $m = n = 1$ natuurlijk, want dan kunnen we het kettingbreukalgoritme gebruiken.

11. Wat staat er in dit proefschrift?

In het inleidende hoofdstuk I geef ik definities van de gebruikte begrippen, klassieke stellingen en de belangrijkste resultaten uit dit proefschrift

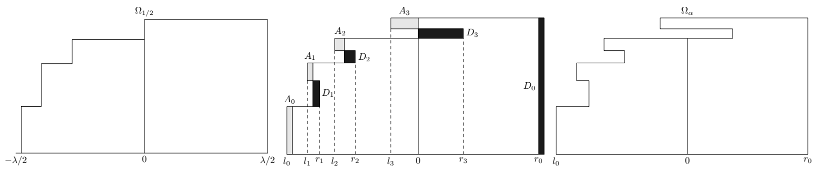
In hoofdstuk II kijk ik naar reguliere kettingbreuken, maar gebruik ik een andere kwaliteitsmaat voor wat een goede benadering is. De vraag die ik voor deze maat beantwoord is: stel dat $n-1$-ste en $n+1$-ste benaderingen heel goed zijn, wat kun je dan zeggen over de kwaliteit van de n-de benadering die daar tussenin zit? En andersom: hoe goed moet een benadering zijn die tussen twee slechte benaderingen inzit? Daarnaast bereken ik ook de kans dat zulke situaties voorkomen.



FIGUUR 3. Een voorbeeld van de meetkundige methode uit hoofdstuk II, zie voor meer uitleg bladzijde 27.

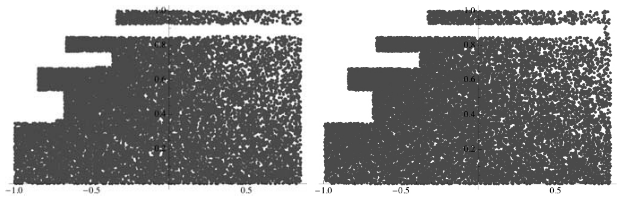
In Hoofdstuk III kijk ik zoals gezegd naar α-Rosen-kettingbreuken. Ik generaliseer de stellingen van Borel (die het minimum van de kwaliteit in een reeks opeenvolgende benaderingen geeft) en Hurwitz (die de kleinste kwaliteit geeft die oneindig vaak voorkomt) voor deze kettingbreuken.

Ook Hoofdstuk IV gaat over α-Rosen-kettingbreuken. Ik bepaal de kleinste waarde voor α waarbij de natuurlijke uibreiding nog één gebied vormt – als α te klein wordt,



FIGUUR 4. Een voorbeeld van *quilten*. Links staat de natuurlijke uitbreiding voor α-Rosen-kettingbreuken met $\alpha = \frac{1}{2}$. In het midden hebben we aangegeven welke rechthoeken weg moeten (zwart) en welke rechthoeken erbij moeten (grijs) om de natuurlijke uitbreiding voor een α-Rosen-kettingbreuk met zekere $\alpha < \frac{1}{2}$ te vinden. Het resultaat staat rechts.

dan valt het gebied in stukken uit elkaar; zie figuur 5. We vinden de natuurlijke uitbreiding met een techniek die we *quilten* noemen: we beginnen met de al bekende natuurlijke uitbreiding voor het geval $\alpha = \frac{1}{2}$ en plakken daar rechthoeken aan en halen daar rechthoeken af. We kunnen door deze constructie ook eigenschappen van de natuurlijke uitbreiding voor een α-Rosen-kettingbreuk afleiden. Zodra de natuurlijke uitbreiding in twee stukken uit elkaar valt, verandert bijvoorbeeld de entropie van het systeem.



FIGUUR 5. Simulaties van de natuurlijke uitbreiding van α-Rosen-kettingbreuken. Links is α te klein, waardoor de natuurlijke uitbreiding in twee losse stukken uit elkaar valt. Rechts is α iets groter en zit er een verbinding tussen de twee delen die in het linkerplaatje los zijn.

In Hoofdstuk V geef ik een meerdimensionaal kettingbreukalgoritme dat efficiënt benaderingen zoekt met een gegarandeerde kwaliteit die alleen afhangt van de dimensies m en n. Uit de benaderingen die dit algoritme vindt, leid ik een ondergrens af voor de kwaliteit van alle mogelijke benaderingen tot een bepaalde grens voor q. Tenslotte toon ik experimentele data voor de verdeling van de kwaliteiten in meer dimensies.